

dr hab. inż. Zdzisław Mikołaj Pawlak, prof. PP^{1*)}

ORCID: 0000-0003-2851-3433

mgr inż. Civan Yavas¹⁾

ORCID: 0009-0003-4834-5999

dr hab. inż. Zbigniew Pozorski, prof. PP¹⁾

ORCID: 0000-0003-0897-6297

Dynamic analysis of passively damped bar structures using visco-elastic layers embedded in nodes

Analiza dynamiczna konstrukcji prętowych tłumionych pasywnie z wykorzystaniem warstw lepko-sprężystych wbudowanych w węzły

DOI: 10.15199/33.2024.12.01

Abstract. Visco-elastic materials are used to reduce excessive vibrations, in passive damping systems for tall buildings loaded with wind or in seismic areas. This paper considers frame structures at the nodes of which layers of visco-elastic material are used. The proposed approach makes it possible to adopt any rheological model to describe the bonds in the connection and to include in the calculations bonds acting only in selected directions.

Keywords: structural nodes; passive damping; visco-elastic layers; rheological models.

Streszczenie. Materiały lepko-sprężyste są stosowane w systemach tłumienia pasywnego budynków wysokich, obciążonych wiatrem lub na terenach sejsmicznych w celu redukcji nadmiernej drgań. W artykule analizowane są konstrukcje ramowe, w węzłach których zastosowano warstwy z materiału lepko-sprężystego. Proponowane podejście umożliwia przyjęcie dowolnego modelu reologicznego do opisu więzów w połączeniu oraz uwzględnienie w obliczeniach więzów działających tylko w wybranych kierunkach.

Słowa kluczowe: węzły konstrukcyjne; tłumienie pasywne; warstwy lepko-sprężyste; modele reologiczne.

Even small dynamic loads acting on building structures can cause undesirable effects that are dangerous in their consequences. In the range of resonant frequencies, dangerous deformations of structures can arise even at a small force amplitudes. In the case of non-typical, irregularly shaped structures, standard wind load models are insufficient, individual load distribution studies are needed [1], and static analyses must be supplemented with dynamic analyses. The dynamic effect of wind is particularly important for slender and tall structures. Therefore, in such structures, special systems for vibration reduction are used to reduce the dynamic effects.

In seismic areas, inertial forces generated by ground motion are an additional load on structure. In order to reduce the unfavorable effects associated with earthquakes, active or passive vibration reduction systems or hybrid (active-passive) systems are used [2]. In general, **active vibration reduction systems** are effective but very expensive solutions. They must include a measuring system that records the vibrations of the structure and software that analyzes the collected data and controls devices that generate sufficiently high forces in the structure. **Passive damping systems** are definitely simpler to operate and cheaper to make and use [3]. Among passive damping systems, three main groups can be distinguished. These are systems in which the base of the building is isolated, systems with added energy dis-

Nawet niewielkie obciążenia dynamiczne, działające na obiekty budowlane, mogą wywołać groźne w skutkach efekty. W zakresie częstotliwości rezonansowych, niebezpieczne deformacje konstrukcji powstają nawet przy małej amplitudzie wymuszenia. W przypadku budowli nietypowych, o nieregularnych kształtach, modele normowe obciążenia wiatrem są niewystarczające. Potrzebne są indywidualne badania rozkładu obciążeń [1], a analizy statyczne muszą być uzupełnione analizami dynamicznymi. Dynamiczne działanie wiatru jest szczególnie istotne w przypadku smukłych i wysokich konstrukcji, dlatego w takich obiektach, w celu złagodzenia efektów dynamicznych, stosuje się specjalne systemy do redukcji drgań.

Na terenach sejsmicznych dodatkowym obciążeniem konstrukcji są siły bezwładności generowane ruchem podłoża. W celu ograniczenia niekorzystnych efektów związanych z trzęsieniem ziemi stosuje się systemy aktywnej lub pasywnej redukcji drgań albo systemy hybrydowe (aktywno-pasywne) [2]. **Systemy aktywnej redukcji drgań** są rozwiązaniami skutecznymi, ale bardzo drogimi. Muszą zawierać układ pomiarowy rejestrujący drgania konstrukcji oraz oprogramowanie, które analizuje zebrane dane i steruje urządzeniami generującymi odpowiednio duże siły w konstrukcji. Zdecydowanie prostsze w działaniu i tańsze w wykonaniu oraz eksploatacji są **systemy pasywnej redukcji drgań** [3], wśród których można wyróżnić trzy zasadnicze grupy. Są to systemy, w których izolowana jest podstawa budynku, systemy z dołożonymi urządzeniami rozpraszającymi energię (tzw. tłumikami drgań) oraz systemy ze strojonymi tłumikami masowymi [4]. Urządzenia rozpraszają-

¹⁾ Poznan University of Technology, Institute of Structural Analysis

^{*)} Correspondence address: zdzislaw.pawlak@put.poznan.pl

sipation devices (so-called vibration dampers) and systems with tuned mass dampers [4]. Energy dissipation devices in buildings are usually mounted on structural bracing rods in the vertical plane of the walls. **The energy dissipating medium can be a viscous liquid or a visco-elastic polymer layer** [5]. Visco-elastic polymer layers can be used to isolate the support of a selected structural element or the base of an entire building. To reduce vibrations, such layers can also be used at the nodes of the structure, at the beam-to-column connection [6]. **Another way to reduce vibrations in a structure is to use friction dampers [7] or shape memory materials [8] at its nodes.** In all these cases, the ability of the modified node to dissipate energy, that is, its damping capacity, is studied. Usually, dynamic analyses involve a specific design solution, where the node as a whole is studied [9]. In some works [10], a finite element is created with visco-elastic (V-E) bonds at the nodes, but this approach is limited to rotational degrees of freedom only [11].

This paper presents a dynamic analysis of a planar bar structure with damping elements located at its nodes. An original way of including V-E bonds in the equations of motion of the structure is proposed, which allows the use of arbitrary rheological models to describe them. Three ways of embedding visco-elastic layers in a node, differing in the direction of the damping and elastic force in the connection, are discussed. To the authors' knowledge, such cases are not studied in the literature. The problem of damping of the frame structure was treated comprehensively, starting with a method of determining the parameters of the V-E material, describing the original structural nodes with polymer layers, the author's method of dynamic analysis of the structure with V-E bonds, and ending with a method of evaluating the effectiveness of vibration reduction.

Bar structure with V-E bonds

In the global equation of motion of a planar bar structure with V-E nodes, it is assumed that the joints are made of three independent bonds and that viscous or elastic properties can be considered in only one selected direction or in all three directions simultaneously.

Visco-elastic node. It is assumed in the study that the V-E bonds at the node act independently: along the axis of the attached bar transferring only the normal force, perpendicular to its axis transferring only the transverse force, and as rotational transferring only the bending moment (Figure 1).

The elastic forces acting in each bond are functions of the elastic coefficients k_r (Figure 1a) and the differences of the corresponding generalized displacements (Figure 2b), while the damping forces in viscous bonds depend on the damping coef-

jące energię w budynkach montuje się zwykle na prętach stężających konstrukcję w płaszczyźnie ścian pionowych. **Czynnikiem rozpraszającym energię może być lepka ciecz lub warstwa polimeru o właściwościach lepko-sprężystych** [5]. Lepko-sprężyste warstwy polimerowe wykorzystywane są do izolacji podpory wybranego elementu konstrukcyjnego lub podstawy całego budynku. W celu redukcji drgań, warstwy takie można również zastosować w węzłach konstrukcji, w połączeniu belki ze słupem [6]. **Innym sposobem ograniczenia drgań w konstrukcji jest stosowanie tłumików ciernych w jej węzłach** [7] lub **materiałów z pamięcią kształtu** [8]. We wszystkich tych przypadkach bada się możliwość rozpraszania energii przez zmodyfikowany węzeł, czyli jego zdolności tłumiące. Analizy dynamiczne dotyczą zwykle konkretnego rozwiązania konstrukcyjnego, gdzie bada się węzeł jako całość [9]. W niektórych pracach [10] tworzony jest element skończony, w węzłach którego są więzy lepko-sprężyste (L-S). Takie podejście ogranicza się jednak tylko do rotacyjnych stopni swobody [11].

W artykule przedstawiono analizę dynamiczną płaskiej konstrukcji prętowej z elementami tłumiącymi zlokalizowanymi w jej węzłach. Zaproponowano oryginalny sposób uwzględniania więzów L-S w równaniach ruchu konstrukcji, który pozwala na stosowanie dowolnych modeli reologicznych do ich opisu. Omówiono trzy sposoby wbudowania warstw lepko-sprężystych w węzeł, różniące się kierunkiem działania siły tłumiącej i sprężystej w połączeniu. Z naszej wiedzy wynika, że takie przypadki nie były prezentowane w literaturze. Problem tłumienia konstrukcji ramowej potraktowano kompleksowo, zaczynając od podania sposobu wyznaczenia parametrów materiału L-S, przez opisanie oryginalnych węzłów konstrukcyjnych z warstwami polimerowymi, autorską metodę analizy dynamicznej konstrukcji z więzami L-S, a kończąc na sposobie oceny efektywności redukcji drgań.

Konstrukcja prętowa z więzami L-S

W globalnym równaniu ruchu płaskiej konstrukcji prętowej z węzłami L-S przyjęto, że połączenia są zbudowane z trzech niezależnych więzów oraz że właściwości lepkie lub sprężyste mogą być uwzględnione tylko w jednym wybranym kierunku lub we wszystkich trzech kierunkach jednocześnie.

Węzeł lepko-sprężysty. W rozważaniach przyjęto, że więzy L-S w węzle działają niezależnie: wzdłuż osi dołączanego pręta, przenosząc tylko siłę normalną; prostopadłe do jego osi, przenosząc tylko siłę poprzeczną oraz jako rotacyjne, przenosząc tylko moment zginający (rysunek 1).

Siły sprężyste działające w poszczególnych więzach są funkcjami współczynników sprężystości k_r (rysunek 1a) i różnicy odpowiednich uogólnionych przemieszczeń (rysunek 2b), a siły tłumienia w więzach lepkich zależą od współ-

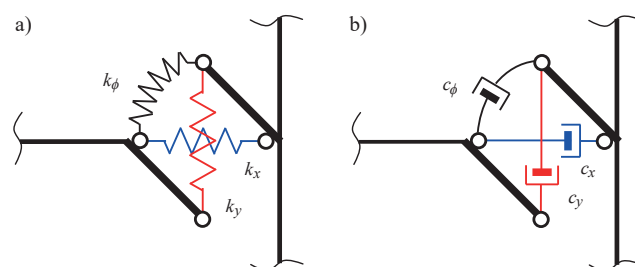


Fig. 1. Symbols of bonds with the properties: a) elastic; b) viscous (damping)
Rys. 1. Symbole więzów o właściwościach: a) sprężystych; b) lepkich (tłumiących)

ficients c_r (Figure 1b) and the velocity differences of these displacements.

The bonds presented in this way correspond to the definition of the Kelvin model (Figure 3a) often used to describe the rheological properties of visco-elastic materials, for which the equation of motion is of the form:

$$f_r(t) = k_r \Delta q_r(t) + c_r \dot{\Delta q}_r(t) \quad (1)$$

where: $\Delta q_r(t) = q_{jr}(t) - q_{ir}(t)$; $\dot{\Delta q}_r(t) = \frac{d}{dt}(q_{jr}(t) - q_{ir}(t))$

This approach makes it possible to use any rheological model to describe the bond, including a more extended one (Figure 3b) or a more advanced one (Figure 3c) that uses non-integral order derivatives ($0 < \alpha \leq 1$) [5, 11, 12]. Figure 3 shows

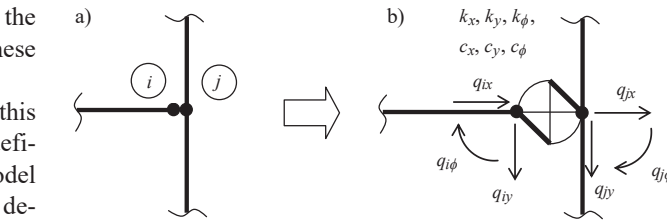


Fig. 2. V-E connection between bars: a) contact of nodes; b) independent displacements
Rys. 2. Połączenie L-S pomiędzy prętami: a) styk węzłów; b) niezależne przemieszczenia

czynników tłumienia c_r (rysunek 1b) i różnicy prędkości tych przemieszczeń.

Więzy przedstawione w taki sposób odpowiadają definicji modelu Kelvina (rysunek 3a), stosowanego często do opisu właściwości reologicznych materiałów lepkosprężystych, dla którego równanie ruchu ma postać:

$$f_r(t) = k_r \Delta q_r(t) + c_r \dot{\Delta q}_r(t) \quad (1)$$

gdzie: $\Delta q_r(t) = q_{jr}(t) - q_{ir}(t)$; $\dot{\Delta q}_r(t) = \frac{d}{dt}(q_{jr}(t) - q_{ir}(t))$

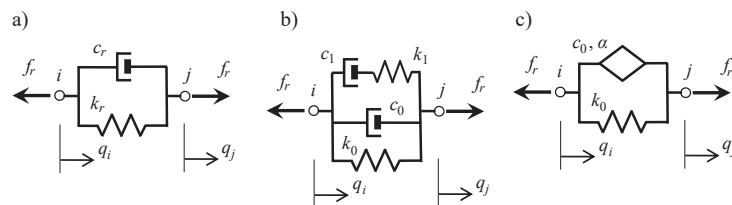


Fig. 3. Examples of rheological models: a) Kelvin; b) Standard; c) Fractional
Rys. 3. Przykładowe modele reologiczne: a) Kelvina; b) Standardowy; c) Ułamkowy

the orientations of the force vectors that arise at the nodes of the model with a positive displacement increment (i.e. $\Delta q = (q_j - q_i) > 0$). In addition, each of the three bonds in the joint can be described by a different rheological model.

The V-E bonds are replaced by forces that are functions of nodal displacements of the structure and are applied, as an external load acting in the corresponding directions (Figure 4). Instead of a system of three bonds, one can assume that the two nodes are connected by a two-node finite element of negligible length ($l \cong 0$), with six degrees of freedom (Figure 4), in which the vectors of the nodal forces are taken according to the notation of the finite element method. This means that when the increments of displacement are positive (e.g., when the finite element is extended), the forces at the left node are negative and those at the right node are positive. In addition, it must be noted that when these forces are applied to the structure as an external load, their directions must be reversed, that is, they will be opposite to the directions of the degrees of freedom (Figure 4). After applying the Kelvin model for all three directions, the stiffness matrix of such a finite element takes the form:

$$\mathbf{K}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_1 \\ -\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_\phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

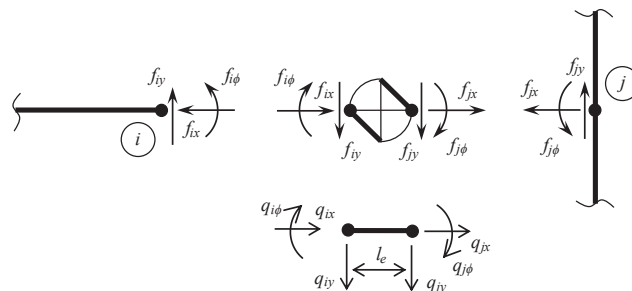


Fig. 4. The system of forces generated in the visco-elastic connection that act on the structure
Rys. 4. Układ sił generowanych w złączu lepkosprężystym, które działają na konstrukcję

Takie podejście umożliwia zastosowanie dowolnego modelu reologicznego do opisu więzy, także bardziej rozbudowanego (rysunek 3b) lub bardziej zaawansowanego (rysunek 3c), w którym stosuje się pochodne niecałkowitego rzędu ($0 < \alpha \leq 1$) [5, 11,

12]. Na rysunku 3 pokazane są też zwroty sił, które powstają w węzłach modelu, przy dodatnim przyroście przemieszczenia, tj. $\Delta q = (q_j - q_i) > 0$. Ponadto, każdy z trzech więzów w złączu może być opisany innym modelem reologicznym.

Więzy L-S są zastępowane przez siły, które są funkcjami przemieszczeń węzłowych konstrukcji i przykładane jako obciążenie zewnętrzne działające w odpowiednich kierunkach (rysunek 4). Zamiast układu trzech więzów można przyjąć, że dwa węzły są połączone dwuwęzłowym elementem skończonym o pomijalnie małej długości ($l \cong 0$) i sześciu stopniach swobody (rysunek 4), w którym zwroty sił węzłowych są przyjęte zgodnie z notacją metody elementów skończonych. Oznacza to, że gdy przyrosty przemieszczeń są dodatnie (np. gdy element skończony jest rozciągany), to siły w lewym węźle są ujemne, a w prawym dodatnie. Ponadto trzeba pamiętać, że gdy siły te zostaną przyłożone do konstrukcji jako obciążenie zewnętrzne, ich zwroty muszą być odwrócone, czyli będą przeciwne do zwrotów stopni swobody (rysunek 4). Po zastosowaniu modelu Kelvina, w przypadku wszystkich trzech kierunków, macierz sztywności takiego elementu skończonego przyjmuje postać:

$$\mathbf{K}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_1 \\ -\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_\phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

However, for more advanced rheological models, the stiffness matrix becomes very complicated, and in the case of models with internal displacements, it cannot be given explicitly.

The equation of motion of the bar structure was written in a matrix form, and visco-elastic connections were taken into account in an additional force vector:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (3)$$

The symbols \mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} denote, respectively, the inertia, damping, and stiffness matrices determined for the structure itself without V-E bonds, $\mathbf{q}(t)$ is the displacement vector, $\mathbf{p}(t)$ is the vector of external dynamic forces, and $\mathbf{f}(t)$ is the vector of forces which are generated in V-E bonds:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{r=1}^m \mathbf{f}_r(t) \quad (4)$$

where: m is the total number of V-E bonds.

It should be noted that the forces are passive forces $\mathbf{f}(t)$ that occur when displacements increase in the V-E bonds. Their action is identical to that of the damping and elastic resistance forces occurring on the left side of the equation. These forces depend on the physical parameters of the V-E bonds, which means that taking them into account must change the dynamic characteristics of the entire structure. After applying the Laplace transformation with zero initial conditions, the equation of motion (3) takes the following form:

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})\bar{\mathbf{q}}(s) = \bar{\mathbf{p}}(s) + \bar{\mathbf{f}}(s) \quad (5)$$

where: s is the Laplace variable, $\bar{\mathbf{q}}(s)$ is the Laplace transform of the displacement vector $\mathbf{q}(t)$, $\bar{\mathbf{p}}(s)$ is the transform of the vector $\mathbf{p}(t)$, and $\bar{\mathbf{f}}(s) = \sum_{r=1}^m \bar{\mathbf{f}}_r(s)$ is the transform of the vector $\mathbf{f}(t)$.

For the selected V-E bond, with the number r , the Laplace transform of the vector of additional forces has the form:

$$\bar{\mathbf{f}}_r(s) = -(K_r + G_r(s))\mathbf{L}_r\bar{\mathbf{q}}(s) \quad (6)$$

The minus sign in formula (6) is a consequence of treating internal forces as an external load applied to the nodes of the structure (Figure 4). The matrix \mathbf{L}_r determines the position of the V-E (finite element) bond, and has dimension $(n \times n)$, where n specifies the total number of degrees of freedom of the structure. If the bond with the number r is embedded between the i -th and j -th degrees of freedom of the structure (Figure 5), the position matrix is calculated based on the allocation vector $e_r = \text{col}(0, \dots, e_i = 1, \dots, e_j = -1, \dots, 0)$, from the formula: $\mathbf{L}_r = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T$.

The functions K_r and $G_r(s)$ are selected according to the adopted rheological model of the bond, for the Kelvin model (Figure 3a), $K_r = k_r$, $G_r(s) = sc_r$, for the Standard model (Figure 3b), $K_r = k_0$, $G_r(s) = sc_0 + sk_1/(v_1 + s)$, where $v_1 = k_1/c_1$, and for the Fractional model (Figure 3c), $K_r = k_0$, $G_r(s) = s^\alpha c_0$. The

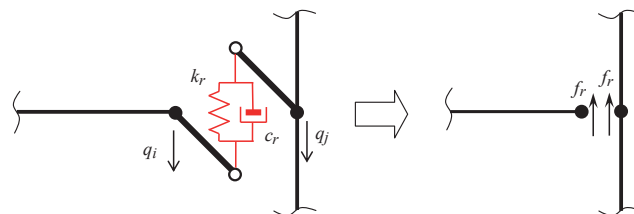


Fig. 5. Additional forces acting on the structure at the V-E bond with the number r
Rys. 5. Dodatkowe siły działające na konstrukcję w miejscu więzów L-S o numerze r

Natomiast w bardziej zaawansowanych modelach reologicznych macierz sztywności bardzo się komplikuje, a w przypadku modeli z przemieszczeniami wewnętrznymi nie można jej podać w sposób jawny.

Równanie ruchu konstrukcji prętowej zapisano w postaci macierzowej, a połączenia lepko-sprężyste zostały uwzględnione w dodatkowym wektorze sił:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (3)$$

Symbole \mathbf{M} , \mathbf{C} i \mathbf{K} oznaczają odpowiednio: macierze bezwładności: tłumienie i sztywność wyznaczone dla samej konstrukcji bez więzów L-S, $\mathbf{q}(t)$ jest wektorem przemieszczeń, $\mathbf{p}(t)$ – wektorem zewnętrznych sił dynamicznych, a $\mathbf{f}(t)$ – wektorem sił generowanych w więzach L-S:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{r=1}^m \mathbf{f}_r(t) \quad (4)$$

gdzie: m – całkowita liczba więzów L-S.

Należy podkreślić, że siły $\mathbf{f}(t)$ są siłami biernymi, które pojawiają się, gdy w więzach L-S zwiększają się przemieszczenia. Ich działanie jest identyczne jak sił tłumienia i sił oporu sprężystego, występujących po lewej stronie równości. Siły te zależą od parametrów fizycznych więzów L-S, co oznacza, że ich uwzględnienie zmienia charakterystyki dynamiczne całej konstrukcji. Po zastosowaniu transformacji Laplace’a, z zerowymi warunkami początkowymi, równanie ruchu (3) przyjmuje postać:

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})\bar{\mathbf{q}}(s) = \bar{\mathbf{p}}(s) + \bar{\mathbf{f}}(s) \quad (5)$$

gdzie: s – zmienna Laplace’a; $\bar{\mathbf{q}}(s)$ – transformata Laplace’a wektora przemieszczeń $\mathbf{q}(t)$; $\bar{\mathbf{p}}(s)$ – transformata wektora $\mathbf{p}(t)$, a $\bar{\mathbf{f}}(s) = \sum_{r=1}^m \bar{\mathbf{f}}_r(s)$ – transformata wektora $\mathbf{f}(t)$.

W przypadku wybranego więzów L-S, o numerze r , transformata Laplace’a wektora dodatkowych sił ma postać:

$$\bar{\mathbf{f}}_r(s) = -(K_r + G_r(s))\mathbf{L}_r\bar{\mathbf{q}}(s) \quad (6)$$

Znak minus we wzorze (6) jest konsekwencją potraktowania sił wewnętrznych jako obciążenia zewnętrznego przykładanego do węzłów konstrukcji (rysunek 4). Macierz \mathbf{L}_r określa położenie więzów L-S (elementu skończonego), ma wymiar $(n \times n)$, gdzie n określa całkowitą liczbę stopni swobody konstrukcji. Jeżeli więź o numerze r jest wbudowana pomiędzy i -tym i j -tym stopniem swobody konstrukcji (rysunek 5), to macierz położenia jest wyliczana na podstawie wektora alokacji $e_r = \text{col}(0, \dots, e_i = 1, \dots, e_j = -1, \dots, 0)$ ze wzoru:

$\mathbf{L}_r = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T$. Funkcje K_r i $G_r(s)$ są dobierane wg przyjętego modelu reologicznego więzów. W przypadku modelu: Kelvina (rysunek 3a) $K_r = k_r$, $G_r(s) = sc_r$; modelu Standardowego (rysunek 3b) $K_r = k_0$, $G_r(s) = sc_0 + sk_1/(v_1 + s)$, gdzie $v_1 = k_1/c_1$, a modelu Ułamkowego (rysunek 3c) $K_r = k_0$, $G_r(s) = s^\alpha c_0$. Całkowity wektor transfor-

total vector of transforms of interaction forces acting between the V-E bonds and the structure can be written as:

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = -\sum_{r=1}^m (K_r + G_r(s)) \mathbf{L}_r \bar{\mathbf{q}}(s) \quad (7)$$

Finally, the equation of motion for a structure with V-E bonds, written in the frequency domain, takes the form:

$$(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{G}_d(s) + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d) \bar{\mathbf{q}}(s) = \bar{\mathbf{p}}(s) \quad (8)$$

where: $\mathbf{K}_d = \sum_{r=1}^m K_r \mathbf{L}_r$; $\mathbf{G}_d(s) = \sum_{r=1}^m G_r(s) \mathbf{L}_r$; while K_r and $G_r(s)$ are functions describing elastic and viscous properties, respectively, in the adopted rheological models for each bond. It is worth noting that a completely different model may be adopted for each bond.

After assuming that no external dynamic forces act on the structure ($\bar{\mathbf{p}}(s) = 0$) equation (8) becomes a nonlinear eigenproblem. Its solutions are the eigenvectors \mathbf{X}_i and the eigenvalues s_i , from which the dynamic characteristics of the structure, i.e. the natural frequencies ω_i and the nondimensional damping ratios can be determined γ_i :

$$\omega_i^2 = \mu_i^2 + \eta_i^2; \quad \gamma_i = -\mu_i / \omega_i \quad (9)$$

where: $\mu_i = \text{Re}(s_i)$; $\eta_i = \text{Im}(s_i)$.

For classical rheological models (e.g., the Kelvin model), the eigenproblem (8) can be linearized and solved by standard methods.

Nodes with visco-elastic layers. The visco-elastic layer (polymer) should be incorporated into the structural node in such a way that shear occurs in the plane of the layer during vibration of the structure (Figures 6 and 8). The shear deformation of the entire layer in its thickness makes the energy dissipation by the polymer the most effective. Figure 6 shows an example of nodes with visco-elastic layers, which have been designed so that two degrees of freedom are blocked and the third degree is restrained by the V-E layer. In view of this, the shear of the polymer layer generates resistance to motion (damping and elastic forces) along the axis of the attached rod (Figure 6a), perpendicular to it (Figure 6b) or generates rotational resistance (Figure 6c), respectively. The connections shown in Figure 6 in the calculations can be modeled with the static schemes shown in Figure 7.

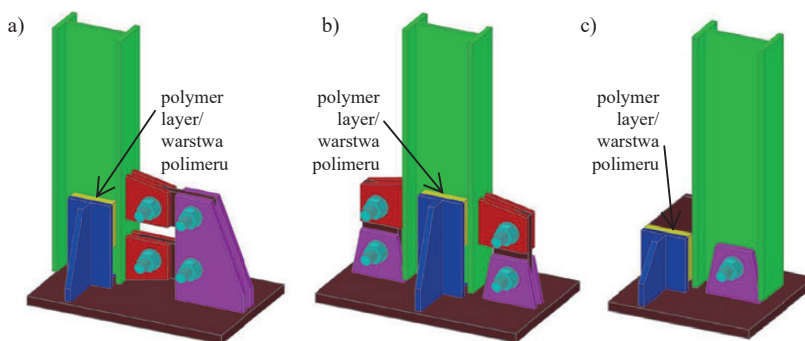


Fig. 6. Nodes with visco-elastic layers restricting motion in only one selected direction: a) axial; b) transverse; c) rotational

Rys. 6. Węzły z warstwami lepko-sprężystymi ograniczającymi ruch tylko w jednym, wybranym kierunku: a) osiowym; b) poprzecznym; c) rotacyjnym

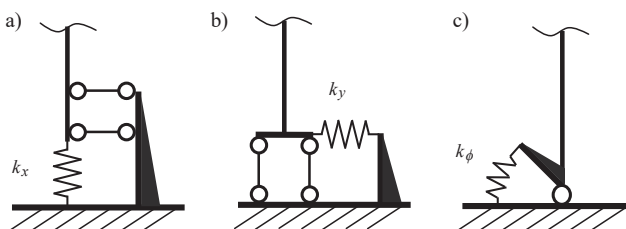


Fig. 7. Models of nodes with elastic bonds in one selected direction: a) axial; b) transverse; c) rotational

Rys. 7. Modele węzłów ze sprężystymi więzami w jednym, wybranym kierunku: a) osiowym; b) poprzecznym; c) rotacyjnym

mat sił interakcji, działających pomiędzy więzami L-S a konstrukcją, można zapisać jako:

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = -\sum_{r=1}^m (K_r + G_r(s)) \mathbf{L}_r \bar{\mathbf{q}}(s) \quad (7)$$

Ostatecznie równanie ruchu w przypadku konstrukcji z więzami L-S, zapisane w dziedzinie częstotliwości, przyjmuje postać:

$$(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{G}_d(s) + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d) \bar{\mathbf{q}}(s) = \bar{\mathbf{p}}(s) \quad (8)$$

gdzie: $\mathbf{K}_d = \sum_{r=1}^m K_r \mathbf{L}_r$; $\mathbf{G}_d(s) = \sum_{r=1}^m G_r(s) \mathbf{L}_r$; a K_r i $G_r(s)$ są funkcjami opisującymi, odpowiednio właściwości sprężyste i lepkie w przyjętych modelach reologicznych dla poszczególnych więzów. Warto zauważyć, że w każdym węźle może być przyjęty inny model.

Po przyjęciu, że na konstrukcję nie działają czynne siły dynamiczne ($\bar{\mathbf{p}}(s) = 0$), równanie (8) przekształca się w nieliniowy problem własny. Jego rozwiązaniem są wektory własne \mathbf{X}_i oraz wartości własne s_i , na podstawie których można wyznaczyć charakterystyki dynamiczne konstrukcji, tj. częstości drgań własnych ω_i i bezwymiarowe współczynniki tłumienia γ_i :

$$\omega_i^2 = \mu_i^2 + \eta_i^2; \quad \gamma_i = -\mu_i / \omega_i \quad (9)$$

gdzie: $\mu_i = \text{Re}(s_i)$; $\eta_i = \text{Im}(s_i)$.

W przypadku klasycznych modeli reologicznych (np. model Kelvina), problem własny (8) można zlinearyzować i rozwiązać standardowymi metodami.

Węzły z warstwami lepko-sprężystymi. Warstwa lepko-sprężysta (polimer) powinna być wbudowana w węzeł konstrukcyjny w taki sposób, aby podczas drgań konstrukcji następowało ścinanie w płaszczyźnie tej warstwy (rysunki 6 i 8). Odkształcenie postaciowe całej warstwy w jej grubości sprawia,

że rozpraszanie energii przez polimer jest najefektywniejsze. Na rysunku 6 przedstawiono przykładowe węzły z warstwami lepko-sprężystymi, które zostały tak ukształtowane, że dwa stopnie swobody są zablokowane, a trzeci krępije warstwa L-S. Wobec tego, ścinanie warstwy polimeru generuje

opory ruchu (siły tłumiące i siły sprężyste) odpowiednio: wzdłuż osi dołączonego pręta (rysunek 6a), prostopadle do niego (rysunek 6b) lub generuje opory rotacyjne (rysunek 6c). Połączenia pokazane na rysunku 6 mogą być modelowane w obliczeniach schematami statycznymi przedstawionymi na rysunku 7.

Based on the dimensions of the visco-elastic layer and the properties of the material from which it was made, it is possible to determine the parameters of the Kelvin model [12], the so-called equivalent elasticity parameter K_e and equivalent damping parameter C_e (functions of the forcing frequency λ):

$$\begin{aligned} K_e(\lambda) &= k_r = \frac{n_v A_v G_1(\lambda)}{h_v} \\ C_e(\lambda) &= c_r = \frac{n_v A_v G_2(\lambda)}{h_v \lambda} \end{aligned} \quad (10)$$

where: $G_1(\lambda)$ is the storage modulus, $G_2(\lambda)$ is the loss modulus, n_v is the number of polymer layers, A_v is the area of the layer, and h_v is the thickness of a single layer (Figure 8).

The storage modulus and loss modulus depend on the forcing frequency λ and define the complex modulus $G^*(\lambda) = G_1(\lambda) + iG_2(\lambda)$ (where $i = -1$), which is often used to determine the rheological properties of visco-elastic materials. The ratio of these two modules is the loss factor $\eta = G_2/G_1$.

Parameters of visco-elastic material

The visco-elastic parameters of the selected material can be determined from the results of laboratory tests, from a dynamic test. A specimen consisting of two layers of the material under test (Figure 8) should be subjected to a time-varying harmonic load of a specified frequency λ , simultaneously recording the force $F(t)$ and displacement $u(t)$. The graph of the relationship between force and displacement forms a hysteresis loop (Figure 9), from which the characteristic quantities can be read: the extreme displacement u_0 and the corresponding force F_1 as well as the value of the force F_2 , at which the displacement is zero. The values read from the graph make it possible to determine the corresponding moduli for a given forcing frequency (λ):

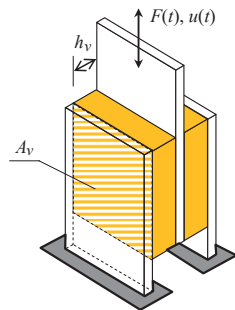


Fig. 8. Two visco-elastic layers connected by rigid plates

Rys. 8. Dwie warstwy lepko-sprężyste połączone sztywnymi blachami

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= \frac{h_v F_1(\lambda)}{A_v n_v u_0} \\ G_2(\lambda) &= \frac{h_v F_2(\lambda)}{A_v n_v u_0} \end{aligned} \quad (11)$$

It is worth noting that in Figure 9 the extreme value of the force (force amplitude F_0) is shifted in time and does not correspond to the extreme value of the displacement (displacement amplitude u_0). The values of the moduli $G_1(\lambda)$ and $G_2(\lambda)$ determined for the selected V-E material can be used to determine the bond parameters k_r and c_r (Kelvin model, formulas 3.12), for a joint built from any number of layers of known size.

Na podstawie wymiarów warstwy lepko-sprężystej oraz właściwości materiału, z którego została wykonana, można określić parametry modelu Kelvina [12], tzw. ekwiwalenty parametr sprężystości K_e i ekwiwalentny parametr tłumienia C_e (zależne od częstości wymuszenia λ):

$$\begin{aligned} K_e(\lambda) &= k_r = \frac{n_v A_v G_1(\lambda)}{h_v} \\ C_e(\lambda) &= c_r = \frac{n_v A_v G_2(\lambda)}{h_v \lambda} \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie: $G_1(\lambda)$ – moduł zachowawczy (ang. storage modulus); $G_2(\lambda)$ – moduł stratności (ang. loss modulus), n_v – liczba warstw polimerowych; A_v – pole powierzchni warstwy; h_v – grubość pojedynczej warstwy (rysunek 8).

Moduł zachowawczy i moduł stratności zależą od częstości wymuszenia λ i definiują moduł zespolony $G^*(\lambda) = G_1(\lambda) + iG_2(\lambda)$, gdzie $i = -1$, który jest często używany do określania właściwości reologicznych materiałów lepko-sprężystych. Natomiast stosunek tych dwóch modułów jest współczynnikiem stratności $\eta = G_2/G_1$.

Parametry materiału lepko-sprężystego

Parametry lepko-sprężyste wybranego materiału można określić z testu dynamicznego na podstawie wyników badań laboratoryjnych. Próbkę złożoną z dwóch warstw badanego materiału (rysunek 8) należy poddać obciążeniom harmonicznym zmiennym w czasie z określoną częstotliwością λ , jednocześnie rejestrując siłę $F(t)$ i przemieszczenie $u(t)$. Wykres zależności pomiędzy siłą i przemieszczeniem tworzy pętlę histerezy (rysunek 9), z której można odczytać charakterystyczne wielkości: ekstremalne przemieszczenie u_0 i odpowiadającą mu siłę F_1 oraz wartość siły F_2 , przy której przemieszczenie jest równe zero. Odczytane wielkości umożliwiając wyznaczenie odpowiednich modułów dla zadanej częstości wymuszenia (λ):

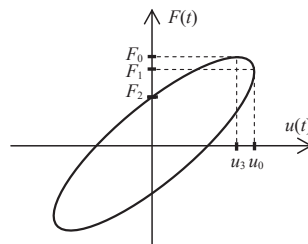


Fig. 9. Hysteresis loop with marked characteristic quantities: F_1 ; F_2 and u_0

Rys. 9. Pętla histerezy z oznaczonymi wielkościami charakterystycznymi: F_1 ; F_2 i u_0

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= \frac{h_v F_1(\lambda)}{A_v n_v u_0} \\ G_2(\lambda) &= \frac{h_v F_2(\lambda)}{A_v n_v u_0} \end{aligned} \quad (11)$$

Warto zauważyć, że na rysunku 9 ekstremalna wartość siły (amplituda siły) jest przesunięta w czasie i nie odpowiada ekstremalnej wartości przemieszczenia (amplitudzie przemieszczenia u_0). Wyznaczone w przypadku wybranego materiału L-S wartości modułów $G_1(\lambda)$ i $G_2(\lambda)$ mogą być wykorzystane do określenia parametrów więzu k_r i c_r (model Kelvina), dla połączenia zbudowanego z dowolnej liczby warstw o znanej wielkości.

Results of sample analyses

A material offered by Getzner Werkstoffe GmbH, Sylodamp SP 1000 polymer, which is dedicated to vibration damping, was used for the analysis. In laboratory tests, a system consisting of layers of $12 \times 50 \times 40$ mm was subjected to dynamic shear. During the test, the amplitude of the displacement ($u_0 = 0.1$ mm) was controlled, and at a given forcing frequency $\lambda = 3.19$ Hz ($\omega = 20$ rad/s), the value of force and displacement were recorded simultaneously. Based on the results of the measurement, hysteresis loops were formed, and then from equations (11) the storage and loss modules were determined: $G_1(\lambda) = 2142$ kPa and $G_2(\lambda) = 919$ kPa.

L-type frame. In order to test the effectiveness of the proposed method, calculations were performed for a frame consisting of two bars, the so-called L-type frame [13]. The two bars are connected to each other at right angles and restrained by supports. At the inner node, the rotational bond is described by a rotational stiffness coefficient $k = 120$ Nm/rad and a damping coefficient $c = 0.25$ Nms/rad. A beam with a length of 0.6 m and a column with a height of 0.9 m have the same cross-section, with a given bending stiffness $EI = 75.7$ Nm², along the bars a uniform mass distribution of $\rho = 72.01$ kg/m was assumed. Table 1 lists the natural frequencies determined by various methods, which were also confirmed by experimental tests. The results obtained using the proposed method coincide with the numerical calculations and the experimental results.

Multi-story frame. The calculations were made for a planar, two-span frame with four floors. The same profiles were assumed for all the stories, HEA 300 I-beam for the beams and HEA 240 for the columns. The span lengths were 6.0 m, and the story heights were 3.0 m. It was assumed that the connectors would be tested with the structure shown in Figure 6, into which two polymer layers (Sylodamp SP 1000) of $12 \times 200 \times 200$ mm would be embedded. The Kelvin model for the bond was adopted, and the elastic coefficient $k_r = 17\,138$ kN/m and the damping coefficient $c_r = 2306$ kNs/m were determined based on equation (10). To obtain the same effect of visco-elastic layers in rotational bonds as in linear bonds, it was assumed that $k_\phi = 17\,138$ kNm/rad, and $c_\phi = 2306$ kNm/rad.

A frame in which all elements are rigidly connected to each other (**RG** model) was used as a reference model. Next, frames were analyzed in which the beams were connected to the columns by three bonds, but the V-E properties were only in one selected direction. The calculations were performed successively, for the case where such bonds were: only in the horizontal direction (**LSH** model), only in the vertical direction (**LSV** model), as well as for

Wyniki przykładowych analiz

Do analiz wykorzystano polimer dedykowany do tłumienia drgań. W badaniach laboratoryjnych poddano ścinaniu dynamicznemu układ złożony z warstw o wymiarach $12 \times 50 \times 40$ mm. Podczas testu kontrolowano amplitudę przemieszczenia ($u_0 = 0,1$ mm) i przy zadanej częstotliwości wymuszenia $\lambda = 3,19$ Hz ($\omega = 20$ rad/s) rejestrowano jednocześnie wartość siły i przemieszczenia. Na podstawie wyników pomiaru utworzono pętle histerezy, a następnie ze wzorów (11) wyznaczono moduł zachowawczy i stratności: $G_1(\lambda) = 2142$ kPa i $G_2(\lambda) = 919$ kPa.

Rama typu L. W celu sprawdzenia efektywności proponowanej metody wykonano obliczenia dotyczące ramy złożonej z dwóch prętów, tzw. ramy typu „L” [13]. Dwa pręty są połączone ze sobą pod kątem prostym i utwierdzone w podporach. W węzle wewnętrznym rotacyjna więź jest opisana współczynnikiem sztywności obrotowej $k = 120$ Nm/rad oraz współczynnikiem tłumienia $c = 0,25$ Nms/rad. Belka o długości 0,6 m i słup o wysokości 0,9 m mają taki sam przekrój, o zadanej sztywności na zginanie $EI = 75,7$ Nm². Wzdłuż prętów założono równomierny rozkład masy $\rho = 72,01$ kg/m. W tabeli 1 podano częstotliwość drgań własnych wyznaczoną różnymi metodami, która została także potwierdzona badaniami eksperymentalnymi. Wyniki otrzymane z wykorzystaniem proponowanej metody są zbieżne z obliczeniami numerycznymi oraz z wynikami eksperymentu.

Rama wielopiętrowa. Obliczenia dotyczyły płaskiej, dwuprzęsłowej ramy o czterech kondygnacjach. Na wszystkich kondygnacjach przyjęto takie same profile; w przypadku rygli dwuteownik HEA 300, a słupów HEA 240. Rozpiętość przęseł wynosiła 6,0 m, a wysokość kondygnacji 3,0 m. Przyjęto, że badane będą złącza o konstrukcji pokazanej na rysunku 6,

w które wbudowane zostaną dwie warstwy polimerowe o wymiarach $12 \times 200 \times 200$ mm. Przyjęto model Kelvina dla więzu, a na podstawie wzoru (10) określono współczynnik sprężystości $k_r = 17\,138$ kN/m oraz współczynnik tłumienia $c_r = 2306$ kNs/m. Chcąc uzyskać taki sam efekt działania warstw lepko-sprężystych w więzach rotacyjnych jak w więzach liniowych, przyjęto, że $k_\phi = 17\,138$ kNm/rad, a $c_\phi = 2306$ kNm/rad.

Jako model referencyjny przyjęto ramę, w której wszystkie elementy są ze sobą sztywno połączone (model **RG**). Następnie analizowano ramy, w których rygle były dołączone do słupów za pomocą trzech więzów, ale cechy L-S były tylko w jednym, wybranym kierunku. Obliczenia wykonano kolejno w przypadku, gdy takie więzy były: tylko w kierunku poziomym (model **LSH**); tylko w kierunku pionowym (mo-

Table 1. Natural frequencies ω_1 [rad/s] determined by different methods for the “L” type frame

Tabela 1. Częstotliwość drgań własnych ω_1 [rad/s] wyznaczona różnymi metodami w przypadku ramy typu „L”

Vibration mode / Postać drgań	Kawashima et al. [13] / Kawashima i in. [13]		Proposed method / Proponowana metoda	Abaqus	Robot Structural Analysis
	analytical-ly / analitycznie	experiment / eksperyment			
1	21,6	21,0	20,84	21,211	21,16
2	47,8	46,0	46,26	46,997	46,85
3	67,2	65,0	65,05	66,499	66,01
4	142,9	138,0	134,15	137,482	135,84

the frame with rotational bonds (LSR model) and with pinned connections (PP model). Table 2 shows the free vibration frequencies determined for the considered frame models. It is worth noting that the three beginning frequencies are similar to each other, but the lowest values were obtained for the case of a frame with vertical V-E bonds (LSV). In a multi-story planar frame, the lowest vibration frequencies are associated with the horizontal movement of the beams. However, in the model with vertical V-E bonds (LSV), the movement of the entire beams as rigid bodies vertically is also possible. In the authors' opinion, the modal mass in this case is the highest, and consequently the vibration frequency is the lowest compared to the other models.

Figures from 10 to 12 show selected forms of vibration of the models under consideration. In Figure 10, the effect of V-E bonds is visible, and differences in the horizontal displacements of the beams relative to the columns are apparent. A similar effect is seen in the case of vertical bonds (LSV), but in the accompanying graphics the differences are less visible (Figure 11). The results obtained for the frame with V-E rotational bonds (LSR) also require clarification. Theoretically, the solutions for the LSR model should be between the results for the PP model and the RG model. Comparing the third vibration modes of these models (Figure 12), it can be seen that the lateral stiffness of the system and the mass of beam's contribution to vertical vibration change simultaneously. The proportion between modal stiffnesses and modal masses does not increase linearly, so the results are difficult to estimate.

The response of the structure to the load induced by ground motion was then determined for each model. The record of the El Centro earthquake (California, 1940) was used for the time-do-

Table 2. Initial natural frequencies ω_i [Hz] for multi-storey frame models

Tabela 2. Początkowa częstotliwość drgań własnych ω_i [Hz] w przypadku modeli ramy wielokondygnacyjnej

Model / Model	Vibration frequency ω_i [Hz] / Częstotliwość drgań ω_i [Hz]				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
RG	1.016	3.150	4.291	4.368	4.413
LSH	0.727	2.511	4.946	7.426	10.953
LSV	0.224	1.432	3.995	7.088	10.853
LSR	1.052	3.264	5.268	7.662	11.060
PP	1.036	2.853	4.042	4.638	6.896

lokondygnacyjnej ramie płaskiej najmniejsza częstość drgań związana jest z ruchem poziomym rygli. W modelu z pionowymi więzami L-S (LSV) możliwy jest także ruch całych rygli, jako brył sztywnych w pionie. Naszym zdaniem masa modalna w tym przypadku jest największa, a co za tym idzie częstość drgań jest najmniejsza w porównaniu z pozostałymi modelami.

Na rysunkach 10÷12 przedstawiono wybrane postacie drgań rozpatrywanych modeli. Na rysunku 10 widoczny jest efekt działania więzów L-S, a także różnica w przemieszczeniach poziomych rygli w stosunku do słupów. Podobny efekt występuje w przypadku więzów pionowych (LSV), jednak

na załączonych grafikach różnice te są mniej widoczne (rysunek 11). Wyjaśnienia wymagają także wyniki uzyskane w przypadku ramy z rotacyjnymi więzami L-S (LSR). Teoretycznie rozwiązania dotyczące modelu LSR powinny się znaleźć pomiędzy wynikami modelu PP i modelu RG. Porównując trzecie postacie drgań tych modeli (rysunek 12), można stwierdzić, że zmienia się jednocześnie sztywność poprzeczna układu i udział masy rygli w drganiach pionowych. Proporcja pomiędzy sztywnością modalną i masą modalną nie wzrasta liniowo, dlatego wyniki są trudne do oszacowania.

Następnie w przypadku każdego modelu wyznaczono odpowiedź konstrukcji na obciążenie ruchem podłoża. Do analizy czasu wykorzystano zapis trzęsienia ziemi w El Centro (California, 1940). W ramach wie-

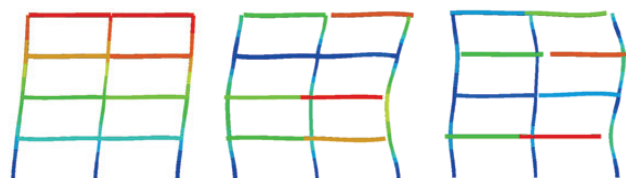


Fig. 10. Three initial forms of vibration in the model with V-E bonds in the horizontal direction (LSH)

Rys. 10. Trzy początkowe postacie drgań w modelu z więzami L-S w kierunku poziomym (LSH)

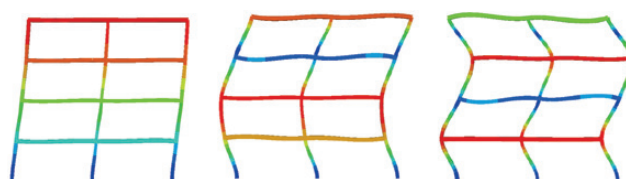


Fig. 11. Three initial forms of vibration in the model with V-E bonds in the vertical direction (LSV)

Rys. 11. Trzy początkowe postacie drgań w modelu z więzami L-S w kierunku pionowym (LSV)

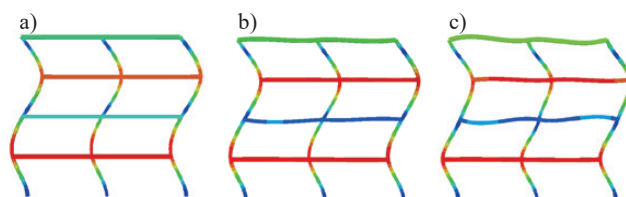


Fig. 12. The third mode of vibration in the model: a) with hinges (PP); b) V-E rotational bonds (LSR), c) with rigid joints (RG)

Rys. 12. Trzecia postać drgań w modelu: a) z przegubami (PP); b) rotacyjnymi więzami L-S (LSR); c) ze sztywnymi połączeniami (RG)

main analysis. In multi-story frames loaded with ground motion, the largest displacements occur on the top floor in the horizontal direction. The course of the change in displacement of the top floor in the selected models is shown in Figure 13, and the extreme values of these displacements are summarized in Table 3.

In the frame under consideration, the most effective was the model with V-E bonds arranged horizontally (LSH), for which the extreme displacement was the smallest. In contrast, for the other models with V-E bonds, the extreme displacement is greater than the result obtained for the frame with rigid nodes (RG).

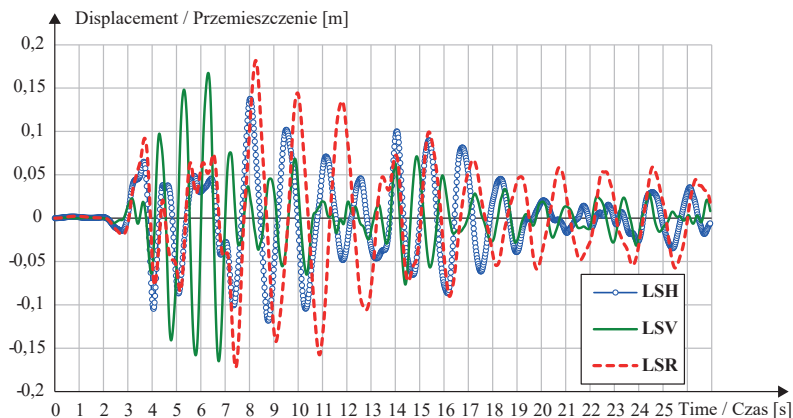


Fig. 13. Horizontal displacement of the upper frame node caused by ground motion

Rys. 13. Przesunięcie poziome górnego węzła ramy wywołane ruchem podłoża

Table 3. Horizontal displacement of the upper frame node δ_H [m] for the models studied

Tabela 3. Przesunięcie poziome górnego węzła ramy δ_H [m] w badanych modelach

Model of connection between beam and column / Model połączenia ryglu ze słupem				
RG	LSH	LSV	LSR	PP
0.165	0.137	0.168	0.182	0.212

lokondygnacyjnych, obciążonych ruchem podłoża, największe przemieszczenia występują na ostatniej kondygnacji w kierunku poziomym. Przebieg zmiany przemieszczenia górnej kondygnacji w wybranych modelach pokazano na rysunku 13, a ekstremalne wartości tych przemieszczeń zestawiono w tabeli 3.

W rozpatrywanej ramie najefektywniejszy okazał się model z więzami L-S ułożonymi poziomo (LSH), w którym ekstremalne przemieszczenie było najmniejsze. W pozostałych modelach z więzami L-S, ekstremalne przemieszczenia są większe od wyniku uzyskanego w przypadku ramy z węzłami sztywnymi (RG).

tremalne przemieszczenia są większe od wyniku uzyskanego w przypadku ramy z węzłami sztywnymi (RG).

Summary

The paper proposes a method of damping vibrations of bar structures by embedding layers of V-E material in its nodes. The method of determining material parameters in the dynamic test is given, as well as the method of estimating the coefficient of elasticity and viscosity for a particular arrangement of layers. The proposed method of considering V-E bonds in the dynamic analysis of the structure allows the use of any rheological models to describe these bonds. In addition, it is possible to analyze joints, both when V-E bonds occur in only one direction and when they occur in more than one direction.

Three ways of embedding V-E layers in a node, differing in the direction of the damping and elastic force, were investigated. Analysis of the effect of each direction of V-E bonds on the dynamic response of the structure showed that polymer layers generating resistance to motion in the horizontal direction are the most effective in reducing vibrations of a multi-story frame.

Podsumowanie

W artykule zaproponowano sposób tłumienia drgań konstrukcji prętowej przez wbudowanie warstw z materiału L-S w jej węzły. Podano sposób wyznaczania parametrów materiałowych w teście dynamicznym oraz sposób szacowania współczynnika sprężystości i lepkości w przypadku konkretnego układu warstw. Zaproponowana metoda uwzględniania więzów L-S w analizie dynamicznej konstrukcji pozwala na stosowanie dowolnych modeli reologicznych do opisu tych więzów. Ponadto możliwa jest analiza połączeń, zarówno w przypadku, gdy więzy L-S występują tylko w jednym kierunku, jak również, gdy występują w kilku kierunkach.

Zbadano trzy sposoby wbudowania warstw L-S w węzeł, różniące się kierunkiem działania siły tłumiącej i sprężystej. Analiza wpływu każdego z kierunków więzów L-S na odpowiedź dynamiczną konstrukcji wykazała, że warstwy polimerowe generujące opory ruchu w kierunku poziomym są najskuteczniejsze w redukcji drgań ramy wielopiętrowej.

Received: 23.09.2024

Revised: 15.10.2024

Published: 20.12.2024

Artykuł wpłynął do redakcji: 23.09.2024 r.

Otrzymano poprawiony po recenzjach: 15.10.2024 r.

Opublikowano: 20.12.2024 r.

Literature

- [1] Kimbar G. Symulowanie w tunelu aerodynamicznym wpływu wiatru na rozkład obciążenia śniegiem dachów. *Budownictwo i Architektura*. 2013; 12(2): 119-126
- [2] Wani ZR, Tantray M, Farsangi EN, Nikitas N, Noori M, Samali B, Yang TY. A Critical Review on Control Strategies for Structural Vibration Control. *Annual Reviews in Control*. 2022; <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2022.09.002>
- [3] Buckle IG. Passive control of structures for seismic loads. *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*. 2000; <https://doi.org/10.5459/bnzsee.33.3.209-221>
- [4] Yang F, Sedaghati R, Esmailzadeh E. Vibration suppression of structures using tuned mass damper technology: A state-of-the-art review. *Journal of Vibration and Control*. 2022; <https://doi.org/10.1177/1077546320984305>
- [5] Lewandowski R, Litewka P, Łasecka-Plura M, Pawlak ZM. Dynamics of Structures, Frames, and Plates with Viscoelastic Dampers or Layers: A Literature Review. *Buildings*. 2023; <https://doi.org/10.3390/buildings13092223>
- [6] Banisheikholeslami A, Behnamfar F, Ghandil M. A beam-to-column connection with visco-elastic and hysteretic dampers for seismic damage control. *Journal of Constructional Steel Research*. 2016; <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2015.10.016>
- [7] D’Aniello M, Montuori R, Nastri E, Piluso V, Todisco P. Parametric Finite Element Study on FREEDAM Beam to Column Joints with Different Details of the Haunch Slotted Holes. *Applied Sciences*. 2024; <https://doi.org/10.3390/app14072770>
- [8] Yam MCH, Fang C, Lam ACC, Zhang Y. Numerical study and practical design of beam-to-column connections with shape memory alloys. *Journal of Constructional Steel Research*. 2015; <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2014.10.017>
- [9] Speicher MS, DesRoches R, Leon RT. Experimental results of a NiTi shape memory alloy (SMA)-based recentering beam-column connection. *Engineering Structures*. 2011; <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.04.018>
- [10] Sekulovic M, Salatic R, Nefovska M. Dynamic analysis of steel frames with flexible connections. *Computers & Structures*. 2002; [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(02\)00058-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00058-5)
- [11] Pawlak ZM, Łasecka-Plura M, Żak-Sawiak M. Modal analysis of frame structures with semi-rigid joints and viscoelastic connections modeled by fractional derivatives. *Archives of Mechanics*. 2023; <https://doi.org/10.24423/aom.4206>
- [12] Xu Y, He Q, Guo Y-Q, Huang XH, Dong YR, Hu Z-W, Kim J. Experimental and Theoretical Investigation of Viscoelastic Damper by Applying Fractional Derivative Method and Internal Variable Theory. *Buildings*. 2023; <https://doi.org/10.3390/buildings13010239>
- [13] Kawashima S, Fujimoto T. Vibration analysis of frames with semi-rigid connections. *Computers & Structures*. 1984; [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(84\)90206-2](https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90206-2)